ELSEVIER
Theoretical Computer Science 281 (2002) 311–324
Theoretical Computer Science
www.elsevier.com/locate/tcs

De la logique aux pavages

Bruno Durand

LIM-CMI, Universite de Provence, 39 rue Jolliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France

Abstract

L'objectif de cet article de synthèse est de présenter ensemble un certain nombre de résultats liant les pavages à la logique suivant divers points de vue: certains structurels, d'autres plus algorithmiques en termes d'indécidabilité, de complexités. © 2002 Published by Elsevier Science B.V.

1. Plan

Nous commençons par présenter des techniques usuelles dans le monde des pavages, discutant des différentes définitions possibles ainsi que des liens qui les unissent. Nous présentons ensuite l'approche topologique et les constructions principales que cette approche permet d'exprimer succinctement.

Les problèmes de logiques autour de *das Entscheidungsproblem* de Hilbert sont exposés brièvement afin que le lecteur puisse comprendre quel est l'apport de la théorie de la pavabilité dans ce domaine. Nous exposons alors les liens entre les pavages et le calculs. Ces liens sont aussi fondamentaux du fait que la notion de calcul porte en elle une large composante géométrique (machines de Kolmogorov–Uspensky [21]).

Nous expliquons comment des pavages complexes peuvent être obtenus en donnant juste les idées nécessaires aux preuves ou seulement les résultats quand ces idées sont trop complexes pour être exposées. Nous exposons différentes versions de ce qu'est la complexité d'un ensemble de tuiles en termes de complexité de Kolmogorov, de degrés d'indécidabilité, ou de structure.

E-mail address: bruno.durand@gyptis.univ-mrs.fr (B. Durand).

0304-3975/02/$ - see front matter
PII: S0304-3975(02)00018-X

2. Prérequis

2.1. Quelques définitions

Les *pavages* peuvent être définis de plusieurs manières. Ils représentent les systèmes à contrainte locale et uniforme du plan discret sans dynamique temporelle. On peut donner diverses définitions plus précises, plus ou moins bien adaptées à ce qu'on souhaite en faire. Nous commençons par présenter les pavages par *tuiles de Wang* [24].

Une *tuile* est un carré unité à bords colorés; dans la suite, les ensembles de tuiles considérés sont supposés être *finis.* Ces tuiles jouent le rôle de "modèles de tuiles": on en place des copies dans les cases du plan. Ainsi, on obtient la notion de configuration: une application du plan discret $\mathbb{Z}^2$ dans l'ensemble de tuiles. On dit alors qu'une zone est bien pavée si on y observe partout que deux côtés de tuiles en contact ont la même couleur. Ainsi, pour certains ensembles de tuiles, on peut former des pavages du plan, pour d'autres on ne peut pas; certains peuvent paver le plan périodiquement (avec 2 vecteurs de périodicité indépendants), d'autres ne le peuvent pas. Pour une expression plus aisée, un ensemble de tuiles qui peut servir à paver le plan est appelés une *palette* (suivant une suggestion de Leonid Levin dans [10]).

D'autres définitions sont possibles. Par exemple, on peut utiliser des carrés à bords dentelés, ou aussi remplacer les carrés par des convexes à sommets à coordonnées rationnels. Dans ces cas, la contrainte locale est l'emboîtement (sans trou) des côtés en contact. On peut remplacer ces côtés dentelés par des flèches de différents types dessinées dans les tuiles et la contrainte locale s'exprime naturellement: toute flèche doit pointer sur la queue d'une flèche du même type. La rationalité des coordonnées des sommets permet de se restreindre à paver le plan régulier $\mathbb{Z}^2$ et non des structures plus complexes comme celles qu'on obtient lorsqu'on utilise des polygones tels les tuiles de Penrose. Nous excluons ces derniers cas de notre étude bien qu'une grande partie des résultats que nous présentons s'y généralisent facilement.

On peut aussi utiliser un modèle général pour exprimer les pavages: les *systèmes à contraintes locales* [16]. Ces systèmes considèrent des mots de dimension 2 sur un alphabet quelconque (toujours fini) qu'on peut réduire à $\{0,1\}$. On appelle alors *configuration* toute application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\{0,1\}$ ET on contraint les configurations de la façon suivante: on définit un *domaine* D (i.e. un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$), et on impose que tous les motifs de domaine D extraits de la configuration (i.e. toutes les applications de D dans $\{0,1\}$ qui sont des restrictions de la configuration translatée d'un vecteur quelconque) appartiennent à un ensemble de motifs autorisés.

Cette notion se formalise aisément et la définition ainsi obtenue ressemble à celle des automates cellulaires, dynamique temporelle en moins: on appelle système à contraintes locales tout couple $c=(V,f)$ où V est un vecteur d'éléments distincts de $\mathbb{Z}^2$ et f une fonction de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$. V est le domaine ou *voisinage* et f la fonction de contrainte. Une configuration p *vérifie* $c=(f,(v_1,\ldots,v_n))$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{Z}^2, \quad f(p(x+v_1), p(x+v_2), \ldots, p(x+v_n)) = 0.$$

On dit qu'un système à contraintes locales est trivial s'il est vérifié par toute configuration, il est non-trivial sinon; $\mathscr{P}(c)$ est l'ensemble des configurations qui vérifient c, et c est une *palette* si et seulement si $\mathscr{P}(c) \neq \emptyset$.

D'un certain point de vue, les systèmes à contraintes locales sont équivalents aux tuiles de Wang: à un ensemble de tuile on peut associer des motifs de 0 et 1 ainsi qu'un système à contraintes locales de telle façon que le plan est pavable (resp. pavable périodiquement[1]) si et seulement s'il existe une configuration (resp. une configuration périodique) qui respecte la contrainte locale. Réciproquement, on peut associer à tout système à contraintes locales un ensemble de tuiles préservant la pavabilité et la pavabilité périodique. Ce raisonnement peut être fait pour les carrés à bords dentelés et on obtient l'équivalence des notions de pavabilité associées.

Ce genre de simulation ressemble à l'équivalence entre modèles de calcul (machines de Turing, machines RAM, algorithmes de Markov, etc.) On peut donc formuler une espèce d'analogue à la thèse de Church-Turing-Post: les *pavages* représentent exactement la notion de systèmes à contraintes uniformes et locales du plan discret. Il est clair que les pavages sont bien de tels systèmes. Maintenant, étudions un système de ce type. Il s'intéresse au plan discret qui peut être vu comme une répartition dans le plan d'informations élémentaires. En d'autres termes, le plan est considéré comme un ensemble de cases (il n'est pas continu) dans lesquelles est répartie de l'information discrète (on ne peut pas mettre un nombre réel dans une case du plan). La contrainte est locale: ce qui se passe au niveau d'une case ne peut influencer que les cases dans un certain rayon autour d'elle. L'uniformité signifie que la contrainte est la même dans tout le plan donc supprime tout rôle spécifique aux numéros des cases. L'absence d'origine notamment va créer des problèmes très profonds étudiés plus loin, car un pavage sans origine n'est pas manipulable par une "machine", où le terme machine est compris dans le cadre des modèles de calculs usuels par exemple de type Turing. La localité et l'uniformité permettent d'utiliser des méthodes de type topologique pour étudier les pavages: les pavages possibles avec une palette fixée forment un ensemble compact. On peut même utiliser des méthodes empruntées aux systèmes dynamiques discrets pour étudier les pavages, ce qui peut paraître surprenant, les pavages n'ayant justement pas de composante dynamique. Le fait que tous les systèmes à contraintes uniformes et locales du plan discret sont "représentables" par des pavages relève du domaine de la conviction et non de celui de la preuve: quelqu'aient étés les systèmes considérés (pavages par pièces dentelées, contraintes sur des états, etc.) il a toujours été possible de les "simuler" par des pavages par tuiles de Wang. Cette simulation est une façon d'expliciter une représentation du système dans le modèle des tuiles de Wang.

Quelles sont les simulations acceptables est une question difficile presque d'ordre philosophique. En effet, on est ici dans le même genre de discussion que pour la thèse de Church-Turing-Post; cette dernière dit que toute formalisation de notre idée intuitive d'algorithme est équivalente aux modèles de calculs connus comme celui de la machine de Turing. Ces formalisations sont souvent de nature très différentes et l'équivalence

[1] Pour nous une configuration est *périodique* si elle admet deux vecteurs de périodicité indépendants (ou par conséquence si elle est formée d'un carré répété périodiquement dans le plan).

consiste à montrer qu'elles calculent les mêmes fonctions sur les mots. Mais pour définir les fonctions qu'elles calculent intervient une notion analogue à celle de simulation: il faut expliquer comment un mot est transformé en une entrée du système, comment le système évolue pour éventuellement donner une sortie, et enfin comment cette sortie est transformée en un mot. Si on n'y prend pas garde, on peut introduire du "non-calculable" dans chacune de ces étapes. Ainsi pour définir un modèle de calcul, il faut définir cette sorte de simulation de telle façon que tout lecteur soit *convaincu* qu'aucune de ces étapes ne sort de ce qu'il entend intuitivement par calculable. Il existe dans la littérature une proposition de domaine unifié dans lequel tous les modèles de calculs seraient exprimables: les machines de Kolmogorov–Uspensky. Le fait que toute formalisation de notre idée intuitive d'algorithme est transformable en une machine de Kolmogorov–Uspensky constitue une autre thèse du même ordre d'idées que celle de Church-Turing-Post [21]. Mais les problèmes de transformations ne disparaissent pas pour autant: ils se retrouvent pour transformer (i.e. simuler) les modèles de calcul connus en des machines de Kolmogorov–Uspensky. Ces simulations ne doivent pas introduire du "non-calculable" et ceci relève du domaine de la conviction et non de celui de la preuve. Ces questions de simulation sont plus délicates encore dans le cadre des automates cellulaires où la notion d'universalité peut prendre différentes significations [9].

2.2. Un peu de topologie

L'approche topologique est souvent utilisée pour les pavages car elle permet des preuves synthétiques. Elle est inspirée de la dynamique symbolique. Nous considérons ici le modèle des tuiles de Wang.

Soit un ensemble de tuiles τ. Munissons-le de la topologie discrète (τ est fini et tous ses sous-ensembles sont des ouverts). Une configuration est donc une application de $\mathbb{Z}^2$ dans τ. L'ensemble de toutes les configurations $\tau^{\mathbb{Z}^2}$ est un produit cartésien dénombrable d'ensembles que l'on peut munir de la topologie produit: un ouvert de $\tau^{\mathbb{Z}^2}$ est une union (quelconque) d'intersections finies d'ensembles de la forme $\mathcal{O}_{i,a} = \{c \in \tau^{\mathbb{Z}^2},\ c(i) = a\}$.

Dans cette approche, la notion de motifs est naturelle: elle correspond aux ouverts fondamentaux de la topologie. Plus précisément on associe à un motif un ouvert défini comme l'ensemble de toutes les configurations égales au motif lorsqu'on les restreint à son support:

$$\mathcal{O}_p = \{c \in \tau^{\mathbb{Z}^2}, c|_{\text{domaine}(p)} = p\}.$$

Il convient de noter que les $\mathcal{O}_p$ (ainsi que les $\mathcal{O}_{i,a}$ qui sont des $\mathcal{O}_p$ particuliers) sont à la fois ouverts et fermés: leurs compléments sont les unions finies des $\mathcal{O}_{p'}$ où domaine(p) = domaine(p') et $p \neq p'$. On qualifie ces ouverts de fondamentaux car tout ouvert $\mathcal{U}$ s'écrit comme union (quelconque) d'ouverts fondamentaux:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{p\,\text{motif}} \mathcal{O}_p.$$

Proposition 1. $\tau^{\mathbb{Z}^2}$ *est un espace métrique compact.*

Preuve. Comme τ muni de la topologie discrète est compact, le produit dénombrable de compacts $\tau^{\mathbb{Z}^2}$ est aussi compact par le théorème de Tychonoff. Mais le théorème de Tychonoff pour les produits dénombrables peut être prouvé de façon très direct, et la technique de preuve employée est très largement utilisée sous différents noms: *procédé d'extraction diagonale* ou *lemme de König* en général. Dans ces deux cas, l'axiome du choix n'est pas nécessaire alors que dans le cas d'un produit quelconque de compacts il est indispensable.

Une distance "discrète" sur l'ensemble fini τ est définie par

$$\text{si } s = s' \text{ alors } d(s,s') = 0 \text{ sinon } d(s,s') = 1.$$

Une distance produit sur $\tau^{\mathbb{Z}^2}$ est donc

$$d(c,c') = 2^{-m}\text{o ŭ } m = \min\{\delta(i,0), c(i) \neq c'(i)\}.$$

On peut utiliser comme distance δ sur $\mathbb{Z}^2$ n'importe quelle distance discrète habituelle comme $\delta((m,n),(0,0)) = \max(|m|,|n|)$. La topologie induite par la distance d ainsi obtenue est la topologie produit. □

On utilise très souvent la compacité de $\tau^{\mathbb{Z}^2}$ et plus précisément celle des pavages par τ notés $\mathscr{P}(\tau)$.

Proposition 2. *Soit τ une palette. L'ensemble $\mathscr{P}(\tau)$ est un compact de $\tau^{\mathbb{Z}^2}$.*

Preuve. Comme $\tau^{\mathbb{Z}^2}$ est compact, il suffit de prouver que $\mathscr{P}(\tau)$ est fermé dans $\tau^{\mathbb{Z}^2}$. Considérons son complément et prouvons que c'est un ouvert. Si une configuration n'est pas un pavage, alors elle contient une "erreur" (i.e. deux côtés en contact de couleurs différentes). Cette erreur apparaît à un certain endroit dans le plan. Considérons un motif M de la configuration englobant cette erreur. L'ensemble $\mathcal{O}_M$ est ouvert, contient cette configuration, et est disjoint de $\mathscr{P}(\tau)$. Ainsi, le complément de $\mathscr{P}(\tau)$ est une union d'ouverts, donc lui-même ouvert. □

2.3. Topologie et quasipériodicité

Définition 1. Considérons deux configurations c_1 and c_2. On dit que c_1 est extraite de c_2 si chaque motif qui apparaît dans c_1 apparaît aussi quelque part dans c_2. On note $c_1 \prec c_2$.

Cette notion est intuitivement très claire. Exprimons-la en termes topologiques. Pour cela, considérons les translations horizontales et verticales σ_h et σ_v. Définissons $\Gamma(c)$ comme la clôture topologique de l'ensemble de tous les translatés de c. Introduire un tel ensemble est bien naturel puisqu'on tend souvent à considérer que deux configurations superposables sont les mêmes. Dans la définition plus formelle qui suit, la clôture topologique est représentée par surlignage:

$$\Gamma(c) = \overline{\bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}} \{\sigma_h^i \circ \sigma_v^j(c)\}}.$$

Proposition 3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:
(a) $c_1 \prec c_2$,
(b) $c_1 \in \Gamma(c_2)$,
(c) $\Gamma(c_1) \subset \Gamma(c_2)$.

Le symbole d'inclusion "$\subset$" est pris ici comme dans la suite au sens large. La preuve de cette propriété est élémentaire et n'introduit pas d'idée nouvelle; nous la laissons donc au lecteur.

Il convient de noter une propriété évidente mais cruciale: si $\Gamma(c_1) \subset \Gamma(c_2)$ et si c_2 est un pavage, alors c_1 est aussi un pavage. Autrement dit, la pavabilité est compatible avec l'extraction (dit autrement elle est monotone pour $\prec$.

Définition 2. Une configuration c est *quasipériodique* si pour tout motif M qui apparaît dans c, il existe un entier n tel que M apparaît dans tout motif carré de taille $n \times n$ pris dans c.

Comme tout motif peut être inclus dans un motif carré et que l'ensemble des motifs carrés de taille bornée est fini, on peut reformuler cette définition en écrivant que c est quasipériodique si et seulement si pour tout m, il existe n tel que tout motif de taille $m \times m$ apparaissant dans c apparaît dans tout motif de c de taille $n \times n$.

Une configuration périodique est bien sûr quasipériodique; nous qualifions de strictement quasipériodique toute configuration quasipériodique non périodique.

La quasipériodicité est une propriété de régularité très importante. Elle intervient notamment dans le domaine des quasicristaux [15,19]. Dans le contexte de la théorie des mots, on dit en général d'un mot quasipériodique qu'il est uniformément récurrent (Fig. 1).

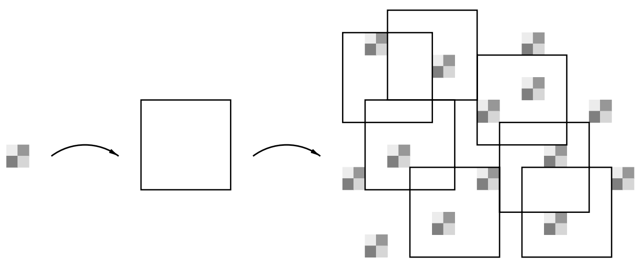

Fig. 1. Configurations quasipériodiques.

Proposition 4. *Une configuration q est quasipériodique si et seulement si $\Gamma(q)$ est minimal pour l'inclusion dans la famille $\{\Gamma(c),\ c\in\tau^{\mathbb{Z}^2}\}$.*

Comme toujours dans cet article de synthèse, les preuves à caractère élémentaire sont omises.

Théorème 1. *Toute palette admet un pavage quasipériodique.*

Ce théorème correspond dans le cas des mots à une dimension à une application du lemme de Furstenberg [11,7]. Il prend ici un sens particulièrement fort et se révèle éclairant [8].

Preuve. La palette τ pave le plan. L'ensemble $\{\Gamma(c),\ c\in\mathscr{P}(\tau)\}$ est donc non vide. Le lemme de Zorn nous assure de l'existence d'un $\Gamma(q)$ minimal donc d'un pavage quasipériodique. □

Il est important de noter que le lemme de Zorn n'est pas pleinement employé car cette proposition ne nécessite pas l'axiome du choix (une preuve combinatoire sans choix se trouve dans [8]). De plus, lorsqu'on regarde le Théorème 1 comme une formule logique, on s'aperçoit qu'elle est trop basse dans la hiérarchie des formules mises sous forme prénexe pour que sa preuve nécessite l'axiome du choix (c'est un théorème de **ZF** si et seulement si c'est un théorème de **ZFC**).

3. De la logique aux pavages

3.1. Le problème

Si les pavages intéressent diverses communautés, les logiciens ont les premiers développé la théorie générales de la pavabilité. Pour comprendre d'où viennent les problèmes de pavabilité en logique, reportons-nous dans les années 1930 après que Gödel a montré ses deux théorèmes d'incomp létude. Le premier théorème d'incomp létude établit dans sa forme syntaxique qu'il existe des formules non prouvables dont la négation n'est pas non plus prouvable, et dans sa forme sémantique qu'il existe des formules vraies mais non prouvables. Ceci est valable pour toute théorie mathématique énumérable [2] comportant au moins l'arithmétique. [3] Ce théorème a constitué la première réponse négative au problème de décision de Hilbert (*das Entscheidungsproblem*). Á la fin du XIXème siècle, on avait déjà donné des axiomatisations

[2] Une théorie est dite *énumérable* si (1) savoir si un texte est ou non une preuve de cette théorie est décidable, (2) il existe un algorithme permettant d'extraire d'une preuve la formule qu'elle prouve (i.e. le théorème).

[3] Une élégante référence pour comprendre la preuve du premier théorème d'incomplétude de Gödel est le texte de V Uspensky [23].

pour certaines branches des mathématiques comme par exemple la géométrie d'Euclide (théorie qu'on montrera plus tard être décidable). HILBERT y avait notamment participé. On disposait aussi d'une formalisation satisfaisante de la notion de preuve, de raisonnement, grâce surtout aux travaux de FREGE. *Das Entscheidungsproblem* est le problème de l'existence d'une procédure automatique (on dirait aujourd'hui d'un algorithme) qui puisse dire si une certaine formule logique est une tautologie (i.e. vraie dans tout modèle), ou si elle est satisfaisable (i.e. vraie dans au moins un modèle), ou si cette formule admet une preuve (i.e. est un théorème). La question d'ordre philosophique sous-jacente au problème de Hilbert était de savoir si on pouvait fonder sur la logique du premier ordre un "monde parfait" des mathématiques i.e. complet et décidable. Le premier théorème d'incomplétude de Gödel a mis un premier coup de frein sérieux à l'espoir d'édifier un tel monde, mais on pouvait encore imaginer qu'en se restreignant à des classes de formules assez larges pour contenir les mathématiques usuelles mais pas trop pour ne pas introduire trop d'indécidabilité, on pourrait tout de même obtenir un monde mathématique assez solide. La question principale a donc été la suivante: étant donnée une classe de formules définie syntaxiquement (par la structure de son préfixe sous forme prénexe), la satisfaisabilité est-elle décidable sur cette classe? Le panorama a été achevé dans les années 1970 [4]: il existe 3 classes décidables maximales et 9 classes indécidables minimales. Étant donnée une classe de formules prénexes, soit elle est incluse dans l'union des 3 classes décidables maximales, soit elle contient au moins une des 9 classes indécidables minimales. Dans le premier cas elle est décidable, dans le second elle ne l'est pas. On peut déterminer syntaxiquement très facilement dans quel cas on se trouve à partir de la structure de la classe (i.e. du préfixe de ses formules sous forme prénexe). [4] Comme les classes décidables sont trop pauvres pour qu'on puisse y exprimer une partie suffisamment signifiante des mathématiques, il est mis un terme définitif à l'idée d'exprimer les mathématiques dans un monde unique, syntaxiquement défini et décidable.

Les pavages interviennent de la façon suivante: on peut transformer tout ensemble de tuiles τ en une formule ψ_τ de la classe de Kahr $K=[\forall\exists\forall,(0,\omega)]$ de telle façon que τ pave le plan si et seulement si ψ_τ est satisfaisable, et que τ pave le plan *périodiquement* si et seulement si ψ_τ est satisfaisable dans un modèle *fini.* Ainsi Hao WANG a posé en 1961 la question du problème de la pavabilité par tuiles à bords colorés [24]. L'indécidabilité du problème de la pavabilité (en 1966 par un élève de WANG du nom de BERGER [3]) montre donc l'indécidabilité de la satisfaisabilité pour une des 9 classes introduites plus haut: la classe de Kahr. L'intérêt des pavages est encore renforcé par le fait que **toutes** les 8 autres classes minimales sont montrées indécidables par réductions à partir de la classe de Kahr. De plus, on ne sait toujours pas faire ces preuves autrement qu'en passant par les pavages. Egon BÖRGER, Erich GRÄDEL, et Yuri GUREVICH ont écrit un livre de synthèse [4] sur *das Entscheidungsproblem* maintenant qu'il est entièrement résolu et une annexe écrite avec Cyril ALLAUZEN y donne une version moderne des constructions de pavages associées [1]. Nous donnons dans la

[4] Les classes de fonctions étudiées ne comportent pas de symbole d'égalité, mais si on ajoute ce symbole et éventuellement des symboles de fonctions le résultat est analogue.

section qui suit quelques idées fondamentales introduites afin d'obtenir les résultats souhaités dans le cadre des pavages.

3.2. Pavages et indécidabilité

L'objectif de cette section est de présenter non pas une preuve complète des résultats présentés mais une explication des idées originales qu'il a fallu introduire pour prouver ces résultats.

Le théorème fondamental est le suivant:

Théorème 2 (Berger [3], Gurevich and Koriakov [26]). *On ne peut pas séparer récursivement les ensembles de tuiles qui ne pavent pas le plan de ceux qui le pavent périodiquement.*

En d'autres termes, soit $N = \{\tau,\ \mathscr{P}(\tau) = \emptyset\}$ et $P = \{\tau,\ \mathscr{P}(\tau) \cup \Pi \neq \emptyset\}$ où Π est l' ensemble des configurations périodiques. Alors N et P sont récursivement inséparables (i.e. il n'existe pas d'algorithme qui prend en entrée τ, s'arrête toujours en répondant 0 ou 1, si $\tau \in N$ répond 0, si $\tau \in P$ répond 1—on autorise les réponses 0 et 1 si τ pave le plan mais non périodiquement).

Ce théorème est une version plus forte du théorème de Berger qui dit qu'on ne peut décider si un ensemble de tuile est ou non une palette.

Il convient de faire d'abord une remarque importante: ce théorème implique qu'il existe une palette *apériodique* (i.e. qui pave le plan mais jamais de façon périodique). En effet, il n'est pas très difficile de voir que N et P sont énumérables. Pour N il suffit d'utiliser la compacité de $\mathscr{P}(\tau)$: si on peut paver des zones carrées non bornées, on peut aussi paver le plan. Donc un algorithme de semi-décision pour N consiste à essayer de paver un carré de taille n en essayant toutes les combinaisons possibles (un nombre fini d'essais suffit) et si le carré est pavable, augmenter sa taille. On obtient un carré non pavable (avec arrêt de notre algorithme) si et seulement si $\tau \in N$. Pour P on essaye aussi tous les carrés et on compare les bord pour voir si les couleurs correspondent. Dès qu'un tel pavage est obtenu, $\tau \in P$. Grâce au théorème de Post qui indique que si un ensemble et son complément sont énumérables alors l'ensemble est récursif, on conclue: il existe des palettes apériodiques.

Le théorème 2 a non seulement pour conséquence l'existence d'une palette apériodique mais en plus utilise une telle palette dans sa preuve. De fait, la question de l'existence d'une telle palette était conjecturée par la négative et on pensait que les problèmes de décisions mentionnés ci-dessus étaient décidables. La raison ayant conduit H. Wang à cette conjecture est assez simple: considérons un pavage ayant un (seul) vecteur de périodicité. Il est donc constitué de "bandes" verticales ou horizontales qui se répètent périodiquement. Dans ces bandes, considérons les segments horizontaux (resp. verticaux). Seul un nombre fini de segments différents peuvent apparaître puisque l'ensemble de tuiles est fini. Ainsi un même segment apparaît à au moins deux reprises. Il suffit de couper le rectangle délimité par la bande et les occurrences des segments pour obtenir un motif pouvant se répéter périodiquement. Ainsi avec le même ensemble de tuiles on peut paver périodiquement le plan. En résumé une palette apériodique forme seulement des pavages n'ayant aucun vecteur de périodicité.

3.2.1. Une palette apériodique

Plutôt que d'introduire un ensemble de tuile et de montrer que c'est une palette apériodique dont les pavages ont un certain nombre de propriétés, nous allons énoncer la propriété que nous recherchons pour cette palette sous une forme qui permet de la reconstruire. Plus précisément, on pourra reconstruire en suivant cette propriété de nombreuses palettes différentes. Peu importe la palette précise qui aura été construite, elle conviendra pour la suite.

Nous considérons une palette σ telle que tous les σ-pavages (i.e. les pavages obtenus avec σ) sont formés de carrés rouges et bleus et caractérisés par la propriété Λ défini par les 4 éléments suivants:

- les plus petits carrés sont rouges, de taille 2×2 et situés à distance 2 les uns des autres;
- au centre de tout carré rouge (resp. de tout carré bleu) est situé le coin d'un carré bleu (resp. d'un carré rouge);
- quelque soit leur taille, deux carrés de même couleur ne s'interceptent pas;
- les carrés de même taille sont alignés horizontalement et verticalement.

Une telle palette σ est construite dans [1]. Nous n'expliquerons pas ici comment en construire une, ce n'est pas très difficile car les 4 éléments de la propriété Λ sont assez faciles à satisfaire à l'aide de tuiles (Fig. 2).

Expliquons maintenant comment cette propriété formulée de façon assez informelle peut être précisée. D'abord les couleurs bleu et rouges ne sont pas des couleurs correspondant au bord des tuiles: on considère une projection de l'ensemble de tuiles dans un ensemble à 5 couleurs (r, b, r–b, b–r, blanc) représentant respectivement le rouge, le bleu, le croisement rouge-horizontal + bleu-vertical, le croisement inverse, et le blanc. La combinaison de carrés est obtenue par cette projection.

Λ est une sorte de propriété d'auto-similarité avec son point d'initialisation (les carrés rouges 2×2) et sa règle de construction donnée par les coins. Les tailles des carrés sont donc 2^k, les cas où k est impair correspondent aux carrés rouges, les pairs aux carrés bleus.

De nombreux pavages peuvent être obtenus puisque cette propriété caractérise un ensemble non dénombrable de combinaisons de carrés. Considérons la combinaison ayant deux axes de symétrie se croisant en $(0,0)$ (cas centré). Considérons la verticale d'abscisse n. n peut être écrit uniquement sous la forme $n = (2k+1)2^l$. Sur cette verticale on trouve les cotés de carrés de taille 2^{l+1}. La parité de l donne la couleur, la parité de k détermine si on est en présence d'un coté gauche (k pair) ou droit (k impair).

Utilisons cette configuration pour caractériser tous les pavages possibles (à translation près). Considérons h et v deux suites infinies sur $\{0,1\}$. Définissons la fonction $s\text{-}h_k$ qui ne fait rien si $h_k = 0$ mais fait une translation horizontale de 2^k sur *tous* les carrés de taille 2^{k+1} si $h_k = 1$. On peut définir la composition infinie

$$s\text{-}h = \cdots \circ s\text{-}h_p \circ \cdots \circ s\text{-}h_1 \circ s\text{-}h_0$$

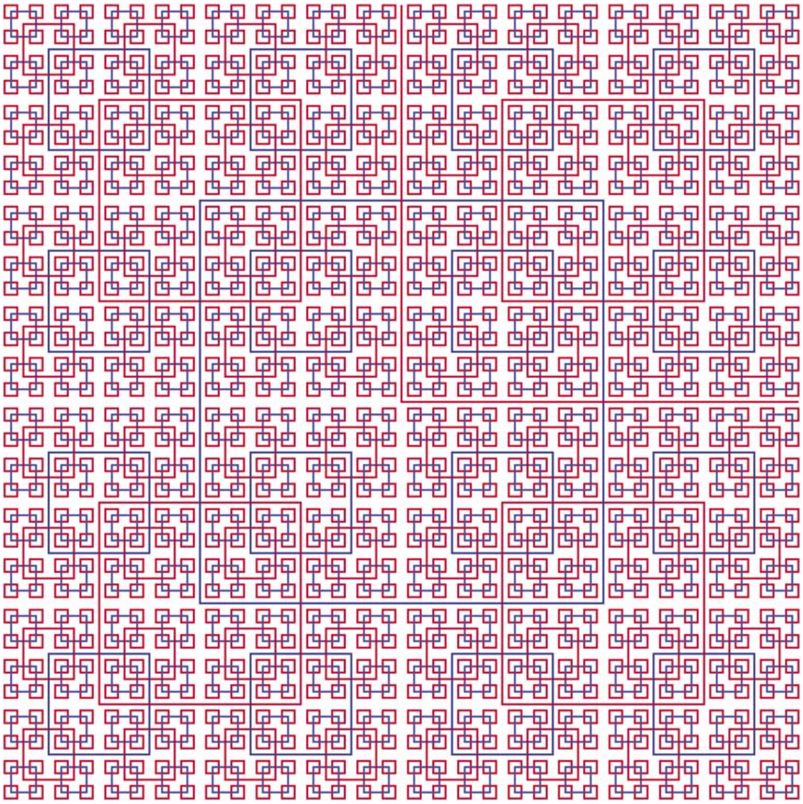

Fig. 2. Combinaisons correspondant à Λ.

puisqu'à partir d'un certain rang on est certain que $s\text{-}h_k$ n'affecte pas de points voisins de l'origine. On définit de façon analogue $s\text{-}v$ sur la suite v. Les fonctions $s\text{-}h$ et $s\text{-}v$ commutent. Toute configuration obtenue du cas centré par application de $s\text{-}h \circ s\text{-}v$ satisfait clairement Λ. Si v ou h sont nulles à partir d'un certain rang, alors soit le centre reste dans le plan, soit un des axes de symétrie reste. Sinon, le centre est expulsé en dehors du plan. Réciproquement, vérifions qu'on a bien caractérisé toutes les configurations vérifiant Λ. On part d'un quelconque des carrés les plus petits et on obtient les carrés de différentes tailles en considérant le carré dont le coin est au centre. A chaque étape n on définit un nouveau carré de taille 2^n qui détermine 3 autres carrés de taille 2^{n-1} en chacun de ses coins. Ainsi on obtient une zone déterminée. Premier cas, cette zone couvre le plan. On obtient ainsi les suites h et v et $s\text{-}h \circ s\text{-}v$ sur le cas centré nous donne la configuration choisie. Second cas, la zone couvre un demi plan. Grâce à la dernière condition de Λ on obtient un des cas décrits précédemment. Dernier cas, la zone remplit un quart de plan et c'est un cas centré.

3.2.2. Calculs

Observons un diagramme espace-temps d'une machine de Turing. Ce diagramme est formé par les états successifs du ruban sur lequel l'état de la tête est inscrit sur la case où elle se trouve. Il est fondamental de remarquer que la règle d'évolution de la machine de Turing considérée est une contrainte locale dans ce diagramme. Ceci permet de "mimer" très simplement les machines de Turing par des pavages. On obtient ainsi des résultats d'indécidabilité [24,25,14], de NP-complétude [22,20] et de NP-complétude en moyenne (selon la théorie de Leonid Levin [18] expliquée par Yuri Gurevich [12,13]).

On montre facilement de la sorte l'indécidabilité du problème de pavabilité contraint: en entrée on considère un ensemble de tuiles et une tuile particularisée dans cet ensemble; la question est de pouvoir ou non former un pavage du plan avec cette tuile particulière à l'origine. L'idée est de représenter la tête de la machine dans l'état initial par cette tuile particulière et avec la construction ébauchée ci-dessus, la machine de Turing considérée ne s'arrête pas sur l'entrée vide si et seulement si l'ensemble de tuiles qui lui est associé pave le plan avec la tuile particularisée à l'origine.

Reprenons notre théorème sur les pavages quasipériodiques. Si nous voulons nous affranchir de la contrainte sur la tuile au centre, il faut qu'on puisse former un pavage quasipériodique du plan dans le cas où la machine de Turing ne s'arrête pas. On en déduit que la tête doit apparaître dans toute fenêtre suffisamment grande, et même que le lemme informel suivant doit être vérifié: pour tout t, il existe une taille de fenêtre telle que où qu'on place cette fenêtre dans n'importe quel pavage du plan par l'ensemble de tuiles ainsi obtenu, on voit dedans au moins t pas de calcul de la machine.

L'idée est donc de rendre les calculs denses dans le plan et ce but est atteint en donnant une structure auto-similaire au diagramme espace-temps de la machine de Turing considérée: le diagramme est tronqué en fragments de différentes tailles; chaque fragment est inséré dans un plus long. On se sert de l'ensemble de tuile σ décrit par la propriété λ pour arriver à ce but.

3.3. Pavages complexes

Le problème de trouver une palette dont la complexité minimale des pavages soit la plus élevée possible est très ancien et résolu de façon optimale dans [10]. Nous avons construit un ensemble de tuile formant des pavages d'irrégularité maximale. Ce problème s'est progressivement imposé comme étant difficile. Il s'inspire du 18ème problème de Hilbert "Savoir s'il existe un polyèdre pavant l'espace uniquement de façon irrégulière". Hilbert a par la suite re-énoncé ce problème dans le plan (problème non encore résolu à cause du cas difficile des pentagones). Ce problème restreint aux tuiles de Wang (i.e. restreint au plan discret $\mathbb{Z}^2$) a été résolu par Berger en 1966—existence d'un ensemble de tuiles dit apériodique. Il est amusant que ce résultat ait été trouvé afin de résoudre *das Entscheidungsproblem* de Hilbert; on peut penser que ce dernier ne s'attendait pas à un tel lien entre ces deux problèmes. Puis Hanf et Myers ont amélioré le résultat de Berger en montrant qu'il existe un ensemble de tuile qui ne produit que des pavages non récursifs. Notre résultat [10] va dans cette direction des ensembles de tuiles générant des pavages de plus en plus complexes mais contient aussi un résultat d'optimalité: notre ensemble de tuiles produit les pavages les plus complexes possibles à une constante multiplicative près. Ces pavages ont la propriété amusante que tout carré de taille $n \times n$ pris dans l'un quelconque d'entre eux contiennent n bits d'une suite aléatoire (à un facteur multiplicatif près). Ces résultats sont obtenus à l'aide de la complexité de Kolmogorov d'une part, de constructions géométriques sur des ensembles de tuiles apériodiques formant des pavages autosimilaires d'autre part.

Une autre façon de se poser la question des pavages complexes est de se demander quel nombre de tuiles de Wang est nécessaire pour obtenir un pavage apériodique. Le meilleur résultat à l'heure actuelle est obtenu par J. Kari et K. Čulik [17] en utilisant une construction fondée sur des systèmes dynamiques dont les évolutions sont toutes non périodiques au lieu d'utiliser l'auto-similarité.

On peut aussi s'intéresser à des questions qui relèvent plus du monde de la combinatoire. A quelle condition peut-on paver le plan par translations à partir d'un polyomino (ensemble connexe de carrés de même taille), ou bien d'un polyomino et de son symétrique par rapport à un des axes, ou par une symétrie centrale. On souhaite bien sûr obtenir une condition décidable par un algorithme efficace. Ces cas on été résolus par des constructions souvent très subtiles. La première en date est celle de D. Beauquier et M. Nivat; elle aboutit à un élégant critère: un polyomino peut paver le plan si et seulement si il forme un pseudo-hexagone [2]. Les deux autres cas ont été résolus l'un par M. Nivat [5] et l'autre ensuite par Cousineau [6] qui emploie des techniques complètement différentes. Les problèmes à 2 polyominos ou plus ne sont pas encore résolus à ma connaissance. En dimension 3, on ne sait pas grand chose...

Il est intéressant d'étudier la complexité des ensembles de tuiles en termes de degrés d'insolvabilité. Le résultat de Hanf et Myers indique qu'il existe des palettes (construites effectivement) qui peuvent générer seulement des pavages non-récursifs (de degré strictement positif). Ceci ne peut être amélioré de façon significative: on ne peut trouver de palette pour lesquels tous les pavages soient au moins $0'$ puisque pour toute palette τ et pour tout ensemble non récursif A, il existe un τ-pavage T tel que A ne soit pas Turing-réductible à T [10]. En s'inspirant du théorème de Rice de la théorie de la calculabilité, on montre qu'on ne peut décider si deux ensembles de contraintes locales non triviaux produisent les mêmes pavages du plan [5].

Enfin, pour retourner à la topologie, on peut mesurer la complexité d'un pavage quasipériodique par sa fonction de quasipériodicité qui, à un entier x associe la taille minimale de fenêtre dans laquelle tous les motifs de taille x apparaissant dans le pavage puisse être observés (quelle que soit la position de la fenêtre). On peut montrer que non seulement presque toutes les fonctions récursives peuvent être observées mais en plus qu'il existe une palette formant une classe unique de pavages quasipériodiques mutuellement extractibles qui ont une fonction de quasipériodicité qui croît plus vite que toute fonction récursive [5]. En d'autres termes, la régularité de ces pavages quasipériodiques ne peut être observée!

[5] Maurice NIVAT m'a exposé cette preuve en détails. Elle est assez longue et délicate mais ne fait intervenir que des arguments combinatoires élémentaires. J'espère qu'il la rédigera un jour prochain tant pour l'intérêt du résultat que pour celui de sa preuve.

References

[1] C. Allauzen, B. Durandm, Appendix A: Tiling problems, The Classical Decision Problem, Springer, Berlin, 1996, pp. 407–420.

[2] D. Beauquier, M. Nivat, On translationg one polyomino to tile the plane, Discrete and Computational Geometry 6 (1991) 575–592.

[3] R. Berger, The undecidability of the domino problem, Memoirs of the American Mathematical Society 66 (1966).

[4] E. Börger, E. Grädel, Y. Gurevich, The Classical Decision Problem, Springer, Berlin, 1996.

[5] J. Cervelle, B. Durand, Tilings: recursivity and regularity, in: H. Reichel, S. Tison (Eds.), Sympo. on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'00), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1770, Springer, Berlin, 2001, pp. 491–502.

[6] G. Cousineau, Characterization of some periodic tiles by contour words, Personnal Communication, 2001.

[7] A. de Luca, S. Varricchio, Handbook of formal languages, Vol. 1, Regularity and finiteness conditions, Springer, 1997, pp. 747–810.

[8] B. Durand, Tilings and quasiperiodicity, Theoretical Computer Science 221 (1999) 61–75.

[9] B. Durand, Zs. Róka, The game of life: universality revisited, in: J. Mazoyer, M. Delorme (Eds.), Theoretical Aspects of Cellular Automata, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, MA, 1999.

[10] B. Durand, L. Levin, A. Shen, Complex tilings, in: ACM Symposium on Theory of Computing, STOC'01, ACM publisher, 2001.

[11] H. Furstenberg, Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.

[12] Y. Gurevich, Complete and incomplete randomized NP problems, in: FOCS, 1987.

[13] Y. Gurevich, Average case completeness, Journal of Computer and System Sciences 42 (1991) 346–398.

[14] D. Harel, Recurring dominoes: making the highly undecidable highly understandable. Ann. Disc. Math. 24 (1985) 51–72.

[15] K. Ingersent, Matching Rules for Quasicrystalline Tilings, World Scientific, Singapore, 1991, pp. 185–212.

[16] J. Kari, Reversibility and surjectivity problems of cellular automata, Journal of Computer and System Sciences 48 (1994) 149–182.

[17] J. Kari, K. Čulik, An aperiodic set of Wang cubes, in: STACS'96, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1046, Springer, Berlin, 1996, 137–146.

[18] L. Levin, Average case complete problems, SIAM J. Comput. 15 (1) (1986) 285–286.

[19] L.S. Levitov, Commun. Math. Phys. 119 (627) (1988).

[20] H.R. Lewis, Complexity of solvable cases of the decision problem for the predicate calculus, in: FOCS, Vol. 19, 1978, pp. 35–47.

[21] V. Uspensky, A. Semenov, Algorithms: Main Ideas and Applications, Kluwer, Dordrecht, MA, 1993.

[22] P. van Embde Boas, Dominoes are forever, Research report 83-04, University of Amsterdam, Department of Mathematics, 1983.

[23] Vladimir A. Uspensky, Gödel's incompleteness theorem, Theoretical Computer Science 2 (130) (1994) 239–319.

[24] H. Wang, Proving theorems by pattern recognition II, Bell System Technical Journal 40 (1961) 1–41.

[25] H. Wang, Dominoes and the $\forall\exists\forall$-case of the decision problem, in: Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata, Brooklyn Polytechnic Institute, New York, 1962, pp. 23–25.

[26] Y. Gurevich, I. Koriakov, A remark on Berger's paper on the domino problem, Siberian. J. Math. 13 (1972) 459–463.